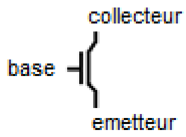
A l'aide de composants électroniques, on peut construire des circuits correspondant aux fonctions booléennes. On appelle ces circuits des ***portes booléennes***, ou ***circuits combinatoires***. Ces circuits utilisent des transistors, composants permettant ou non de laisser passer le courant en fonction de la tension appliquée (modélisant ainsi un langage binaire).

Partie I : Circuits combinatoires

Transistor

Un semi-conducteur est un matériau qui a les caractéristiques électriques à la fois d'un isolant et d'un conducteur, dépendant de la tension qui lui est appliquée.



Un transistor est un dispositif semi-conducteur à trois électrodes actives, qui permet de contrôler un courant ou une tension provenant du collecteur, sur l'émetteur (l'électrode de sortie) grâce à une électrode de base.

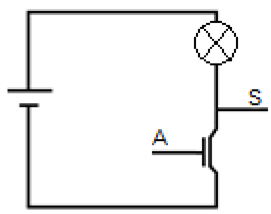
Dépendant de la tension appliquée à la base, le courant sera ou non bloqué :

- lorsque la tension appliquée à la base du transistor est supérieure à un certain seuil, on dit que le transistor est *bloqué* – il devient équivalent à un interrupteur ouvert.
- lorsque la tension appliquée à la base du transistor est inférieure au seuil, on dit que le transistor est *passant* – il devient équivalent à un fil.

On peut alors faire passer des informations binaires :

$U_{base} > U_{seuil} \rightarrow$ bloqué $\rightarrow 0$ $\qquad$ $U_{base} \leq U_{seuil} \rightarrow$ passant $\rightarrow 1$

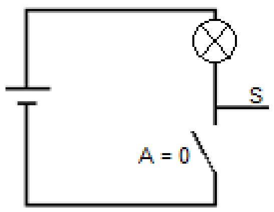
Prenons l'exemple du circuit ci-contre, comprenant un générateur, un transistor et une ampoule (qui est présente pour une meilleure visualisation, mais qui n'existe bien sûr pas dans les circuits des ordinateurs).



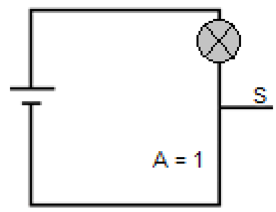
Si l'ampoule s'allume, c'est que le courant passe vers la sortie (équivalent de 1) ; sinon, le courant ne passe pas (équivalent de 0).

Il existe deux possibilités de fonctionnement pour ce circuit :

- $U_A > U_{seuil}$, donc A = 0
Le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert.
L'ampoule ne s'allume pas car le courant ne passe pas.

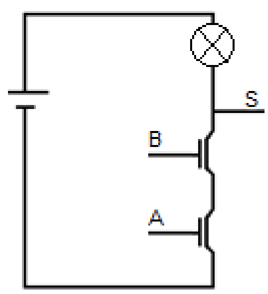


- $U_A \leq U_{seuil}$, donc A = 1
Le transistor est équivalent à un fil.
L'ampoule s'allume car le courant passe

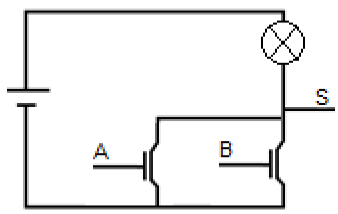


I.1. Déterminer à quelles fonctions booléennes correspondent les circuits ci-dessous.

a.



b.



Partie II : Symboles

Par souci de simplicité, les circuits combinatoires sont représentés par des symboles, donnés dans le tableau ci-dessous.

TYPE : NON (NOT)

SYMBOLE :

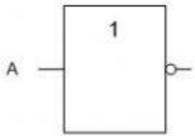


TABLE DE VERITE :

Entrée	Sortie
A	$\bar{A}$
0	1
1	0

TYPE : ET (AND)

SYMBOLE :

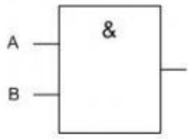


TABLE DE VERITE :

Entrée		Sortie
A	B	
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

TYPE : OU (OR)

SYMBOLE :

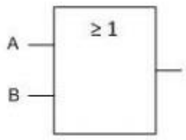


TABLE DE VERITE :

Entrée		Sortie
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

TYPE : OU EXCLUSIF (XOR)

SYMBOLE :

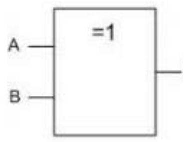


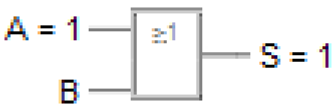
TABLE DE VERITE :

Entrée		Sortie
A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

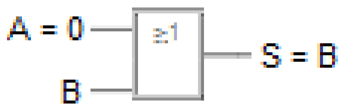
Note : Le rond au niveau de la sortie correspond au NOT – il peut être ajouté en sortie du ET pour avoir NON-ET, du OU pour avoir NON-OU ou du EXC pour avoir NON-EXC

II.1. Montrer que les relations suivantes sont toujours vraies :

a.

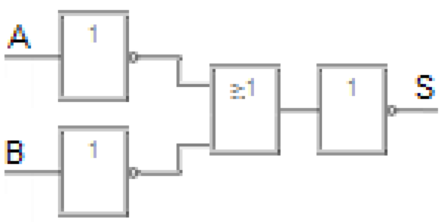


b.

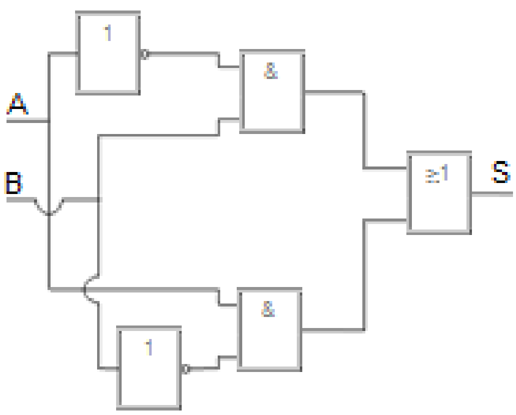


II.2. A quelles fonctions booléennes correspondent les circuits ci-dessous ?

a.



b.

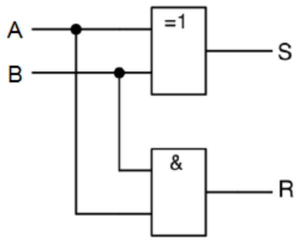


Partie III : Circuits logique complexes

A. L'additionneur

Un additionneur est un circuit logique permettant de réaliser une addition.

Commençons par étudier le circuit combinatoire du demi-additionneur ci-contre : Pour des entrées A et B codées sur 1 bit, le demi-additionneur donne en sortie S le résultat de l'addition et en R la retenue (si le résultat de l'addition dépasse 1 bit).



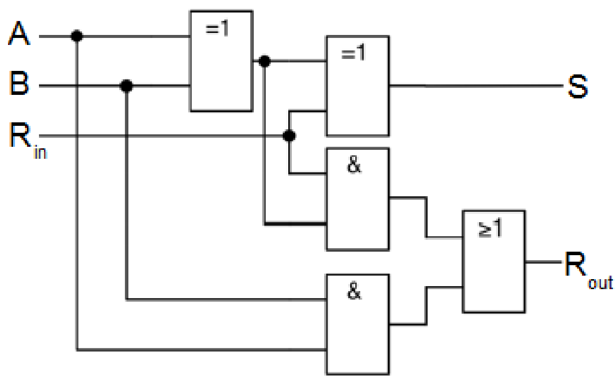
IIIA.1. Compléter la table de vérité de du demi-additionneur donnée ci-dessous.

A	B	S	R
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

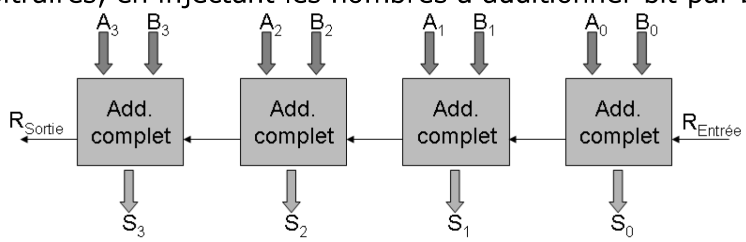
IIIA.2. Combien d'additions sont possibles sur 1 bit ? Les lister.

Un additionneur complet nécessite que la retenue du précédent calcul soit prise en compte en entrée (il faut donc une troisième entrée). Pour cela, on place deux demi-additionneurs en série accompagnés d'un OU entre les deux retenues générées par chacun des demi-additionneurs, pour calculer la retenue finale.

Note : Lors du premier calcul, R_{in} = 0.



Il est alors possible de chaîner plusieurs additionneurs un bit pour en fabriquer un capable de traiter des données de longueurs arbitraires, en injectant les nombres à additionner bit par bit.



IIIA.3. Traduire le circuit logique de l'additionneur complet en fonctions booléennes (en utilisant NOT, AND, OR et XOR) pour la sortie S puis pour la retenue finale R_{out}.

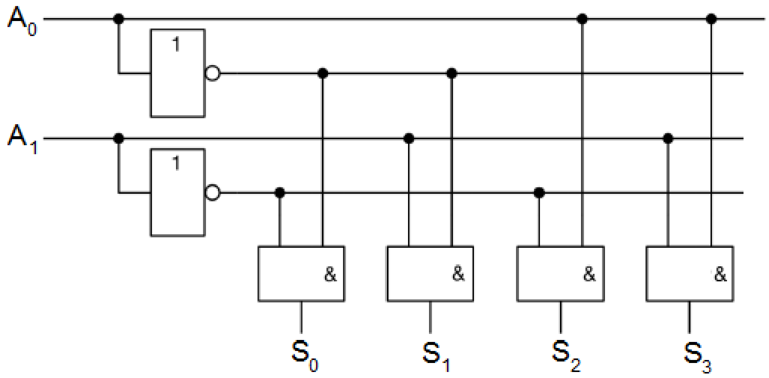
IIIA.4. Compléter la table de vérité de l'additionneur donnée ci-dessous.

A	B	R_{in}	S	R_{out}
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Le décodeur

La mémoire d'un ordinateur est composée de milliard de petites cases à 1 octet, appelées *cases mémoires*, chacune identifiées par un numéro binaire appelé l'*adresse*.
Lorsque l'ordinateur fait référence à l'adresse d'une case mémoire, le décodeur permet de sélectionner la case mémoire correspondante.

Considérons le cas du décodeur « 2 vers 4 » : ce décodeur prend en entrée une adresse sur n = 2 bits (A_0 et A_1) et oriente vers l'une des $2^n = 4$ cases mémoires S_0, S_1, S_2 ou S_3 en sortie.



IIIB.1. Traduire le circuit logique du décodeur en fonctions booléennes pour les sorties S_0 et S_2.

IIIB.2. Compléter la table de vérité du décodeur donnée ci-dessous, en fonction de l'adresse sur 2 bits.

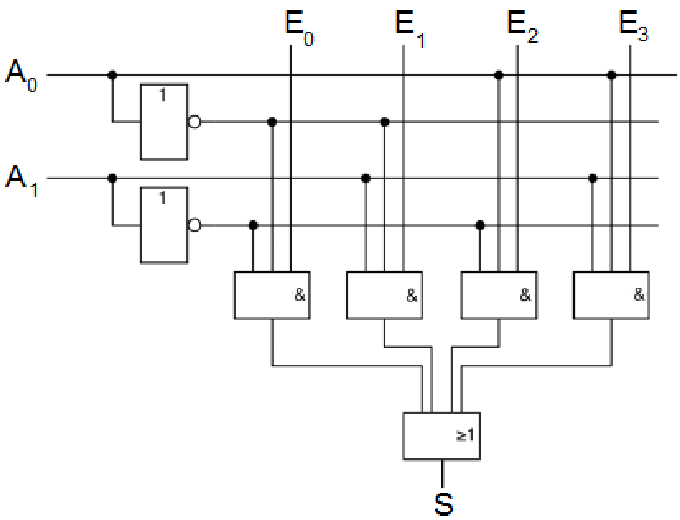
Adresse		**Cases mémoires**			
A_0	**A_1**	**S_0**	**S_1**	**S_2**	**S_3**
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Pour aller un peu plus loin…

Le multiplexeur

Le multiplexeur permet de choisir une entrée parmi 2^n (donc adressée sur n bits) et de la recopier sur la sortie.
L'intérêt du multiplexeur est de pouvoir connecter plusieurs entrées à un même circuit et de sélectionner l'entrée voulue simplement en indiquant son adresse sur les lignes de commande. On peut ainsi relier plusieurs composants entre eux en minimisant les fils de connexion.

On considère ici le cas d'un multiplexeur « 4 vers 1 ».



- Sur quel circuit logique vu précédemment se base le multiplexeur ?
- Traduire le circuit logique du décodeur en fonctions booléennes puis déterminer la sortie pour $A_0 = 1$ et $A_1 = 0$.