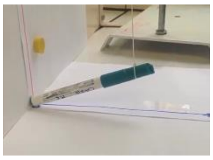
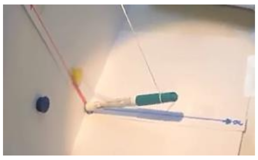
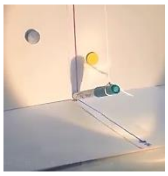
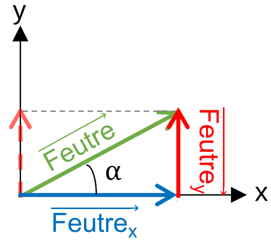
Projection de vecteurs

La projection de vecteur est un outil essentiel en physique, et particulièrement en mécanique, afin de déterminer les composantes *x* et *y* d'un vecteur.

Imaginons l'expérience suivante : On place l'extrémité d'un feutre, attaché à une ficelle à l'autre extrémité, sur le coin entre deux plans perpendiculaires de telle sorte à ce que le feutre fasse un angle avec les axes (image de gauche).
Si on éclaire le feutre directement au-dessus, une ombre se projette sur l'axe horizontal : c'est la projection orthogonale selon l'axe Ox (image du centre).
De même, si on éclaire le feutre directement en face, une ombre se projette sur l'axe vertical : c'est la projection orthogonale selon l'axe Oy (image de droite).

Le feutre et ses projections forment alors un triangle rectangle, dans lequel les règles de trigonométrie et le théorème de Pythagore s'appliquent :

Trigonométrie (CAH SOH TOA)

$$\cos\alpha = \frac{Adjacent}{Hypoténuse} = \frac{Feutre_x}{Feutre} \qquad \sin\alpha = \frac{Opposé}{Hypoténuse} = \frac{Feutre_y}{Feutre}$$

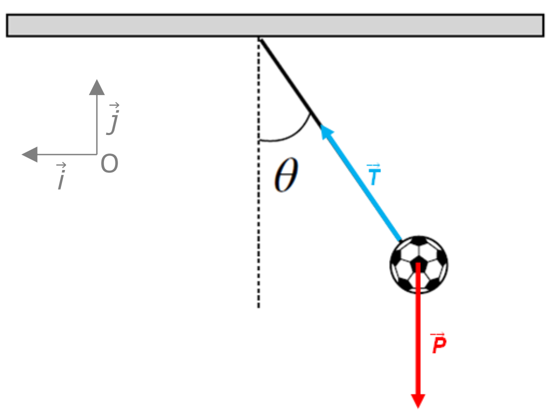
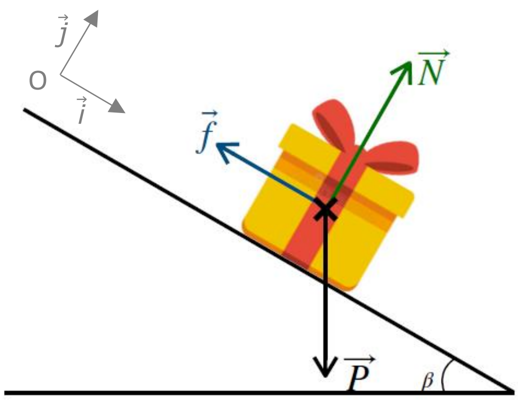
$$\tan\alpha = \frac{Opposé}{Adjacent} = \frac{Feutre_y}{Feutre_x}$$

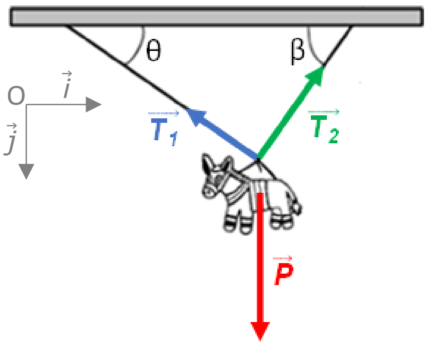
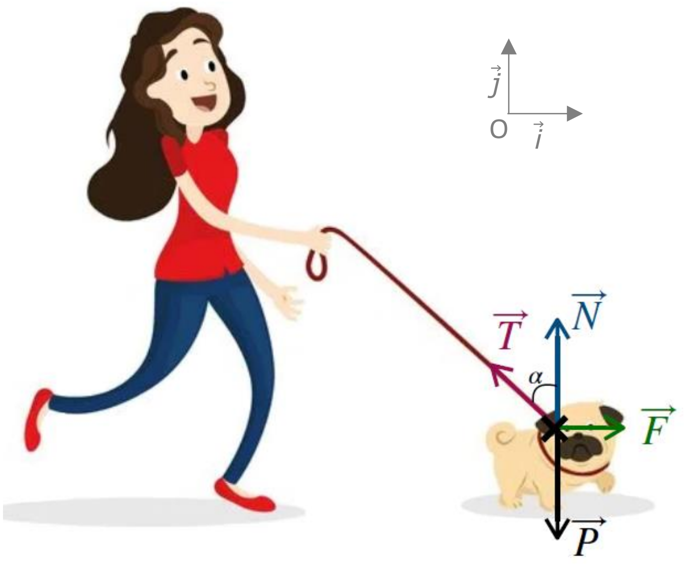
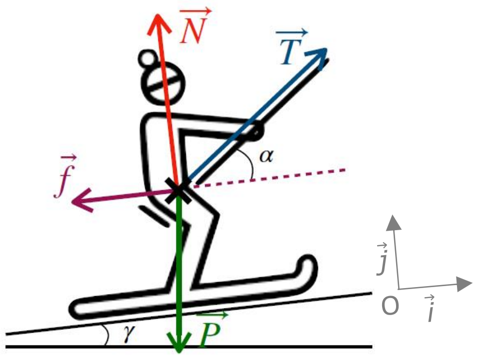
Pythagore

$$Feutre^2 = Feutre_x^{\,2} + Feutre_y^{\,2}$$

Exercice I

Dans le cas de chaque système, projeter les forces appliquées sur la base de coordonnées (Oxy) et représentée par deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Indiquer à chaque fois les expressions des valeurs des projections sur x et y en fonction de la norme du vecteur et, le cas échéant, des angles donnés.

Système : Ballon	Système : Cadeau
	
Expressions :	Expressions :

Système : Jouet	Système : Chien
 Expressions :	 Expressions :
Système :Skieur	
 Expressions :	

Vitesse

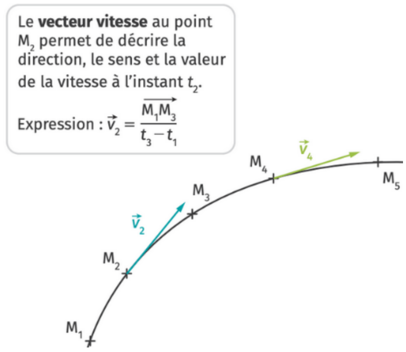
Le vecteur vitesse d'un point matériel M permet de décrire la direction, le sens et la valeur de la vitesse en un point, à un instant *t* donné. Il est, en tout point, tangent à la trajectoire, et orienté dans le sens du mouvement.

Prenons le cas d'une trajectoire représentée par 3 points M_1, M_2 et M_3. Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}$, d'un système au point matériel M_2 se calcule entre les deux dates t_1 et t_3 et a pour expression :

$$\vec{v_2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{t_3 - t_1}$$

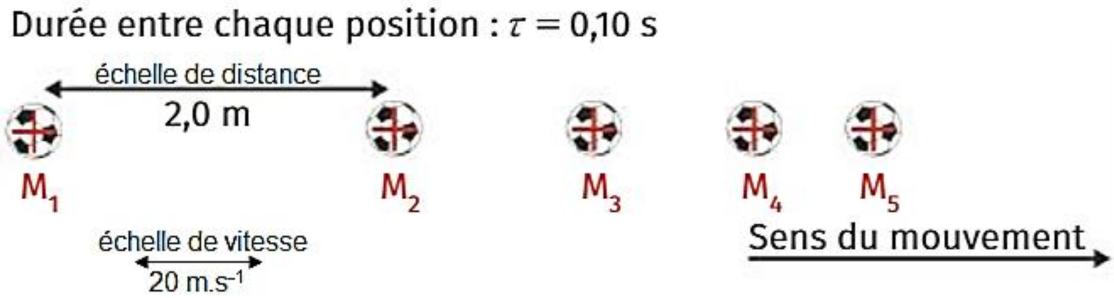
Ce vecteur a les caractéristiques suivantes :

- **Direction :** parallèle au segment M_1M_3
- **Sens :** celui du mouvement
- **Norme :** $v_2 = \frac{M_1M_3}{t_3 - t_1}$ avec M_1M_3 la distance en mètre entre le point M_1 et le point M_3 ; $t_3 - t_1$ la durée en seconde et enfin, v_2 la valeur de la vitesse en mètre par seconde ($m.s^{-1}$).



Exercice II

Les positions successives d'un ballon de football sont représentées ci-dessous.



Calculer la valeur de la norme du vecteur $\vec{v_4}$ puis le représenter, à l'échelle.

Forces

Une force correspond à l'action d'un système sur un autre. Dans le cas de l'action d'un système {A} sur un système {B}, on note en général la force $F_{A/B}$.

Une force est représentée par un vecteur et est caractérisée par :

- une direction : droite portant la force
- un sens : sens de la force
- une valeur : elle s'exprime en Newton (N) et est proportionnelle à la taille de la flèche
- un point d'application : origine du vecteur correspondant au point qui subit la force

Force de gravitation

Deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B, séparés par une distance *d* exprimée en mètre, exercent l'un sur l'autre des forces attractives de même valeur F telle que :

$$F_g = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

Avec : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$ appelée constante de gravitation universelle
m_A et m_B en kilogramme (kg)
d distance en mètre (m) entre les centres des corps A et B (centre de gravité au centre).
F_g en Newton (N)

Masse et poids

• La masse est une mesure de la matière d'un corps.
Afin de mesurer la masse *m* d'un objet, on utilise une balance, et l'unité de mesure est le kilogramme (kg).

• Le poids est une mesure de l'attraction gravitationnelle d'une planète sur un corps à la surface de la planète.
Afin de mesurer le poids *P* d'un objet, on utilise un dynamomètre. Le poids étant une force, l'unité de la mesure est le Newton (N).

Le poids dépend de la planète sur laquelle on se trouve, mais la masse reste toujours la même.
La relation entre le poids et la masse est : $\boldsymbol{P = m \times g}$

Exercice III

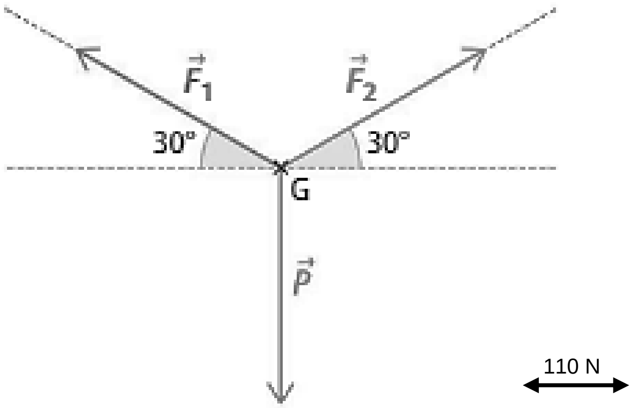
Un feu tricolore suspendu par deux chaînes faisant un angle de 30° avec l'horizontale est immobile dans le référentiel terrestre. La somme vectorielle des forces qui s'exercent sur le feu dans le référentiel terrestre est nulle. On représente sur le schéma les forces qui s'exercent sur le feu modélisé par le point G.

a. Identifier les actions modélisées par chaque force.

b. Déterminer graphiquement les caractéristiques de ces forces.

c. Faire la somme vectorielle des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$.

d. Vérifier que le vecteur obtenu est opposé au poids.



Exercice IV

Le satellite naturel Io est en orbite autour de Jupiter dans le référentiel jupiterocentrique. La distance qui sépare les centres de ces astres est $d = 4{,}92 \times 10^5$ km.

Données • $m_{Io} = 8{,}93 \times 10^{22}$ kg • $m_J = 1{,}9 \times 10^{27}$ kg

a. Calculer la valeur $F_{Io/J}$ de la force d'interaction gravitationnelle exercée par Io sur Jupiter.

b. Donner les caractéristiques de cette force.

Exercice V

Lors du programme spatial américain Apollo (1961-1972), le véhicule spatial utilisé, appelé module lunaire ou LEM (pour *Lunar Excursion Module*), avait pour but de faire atterrir sur la Lune deux des membres d'équipage du vaisseau *Apollo*. Il leur permettait de séjourner sur l'astre avant de rejoindre le module de commande et de service (CMS) resté en orbite lunaire et chargé de les ramener sur Terre. La masse du LEM était de 15 tonnes.

1. a. Calculer l'intensité du poids du module sur la Terre.

b. Calculer l'intensité du poids du module sur la Lune.

2. Quelle est la masse m' d'un objet dont l'intensité du poids sur la Terre est égale à celle du module sur la Lune ?

Données : $g_T = 9{,}81$ N.kg^{-1} $g_L = 1{,}62$ N.kg^{-1}

Réponses

Exercice I	Ballon : $\vec{P} = -P\,\vec{j}$; $\vec{T} = T\sin(\theta)\,\vec{i} + T\cos(\theta)\,\vec{j}$ Cadeau : $\vec{N} = N\,\vec{j}$; $\vec{f} = -f\,\vec{i}$; $\vec{P} = P\sin(\beta)\,\vec{i} - P\cos(\beta)\,\vec{j}$
	Jouet : $\vec{P} = -P\,\vec{j}$; $\vec{T_1} = -T_1\cos(\theta)\,\vec{i} + T_1\sin(\theta)\,\vec{j}$; $\vec{T_2} = T_2\cos(\beta)\,\vec{i} + T_2\sin(\beta)\,\vec{j}$
	Chien : $\vec{N} = N\,\vec{j}$; $\vec{P} = -P\,\vec{j}$; $\vec{F} = -F\,\vec{i}$; $\vec{T} = -T\sin(\alpha)\,\vec{i} + T\cos(\alpha)\,\vec{j}$
	Skieur : $\vec{N} = N\,\vec{j}$; $\vec{f} = -f\,\vec{i}$; $\vec{P} = -P\sin(\gamma)\,\vec{i} - P\cos(\gamma)\,\vec{j}$; $\vec{T} = T\cos(\alpha)\,\vec{i} + T\sin(\alpha)\,\vec{j}$
Exercice II	$v_4 = 8{,}5$ m/s
Exercice III	**a.** $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ = actions des chaines ; $\vec{P}$ = poids du feu. **b.** $P = F_1 = F_2 = 242$ N **c. d.** Le vecteur est bien opposé à $\vec{P}$
Exercice IV	**a.** $4{,}67 \times 10^{22}$ N **b.** entre Io et Jupier, orientée vers Io, point d'application Jupiter.
Exercice V	**1. a.** $1{,}47 \times 10^5$ N **b.** $2{,}43 \times 10^4$ N **2.** 2477 kg